

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР МЕТОДОВ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ И H_∞ -ОПТИМИЗАЦИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО ОБЪЕКТА

О.Д. ГОРБАТЮК, К.В. МЕЛЬНИК

Рассматривается задача подавления ограниченных по модулю внешних возмущений для стабилизации вертолета в режиме висения. Решения поставленной задачи осуществляется методом линейных матричных неравенств (ЛМН) и H_∞ -оптимизации. Анализ полученных результатов синтеза выполнен аналитически, а также путем моделирования системы стабилизации в среде Simulink. Дана интерпретация полученных результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Подавление действующих на вертолет внешних возмущений, таких как турбулентный ветер, однократные порывы ветра и т.д., является чрезвычайно важной авиационной задачей с точки зрения безопасности полета, повышения эффективности функционирования летательного аппарата (ЛА), облегчения пилоту выполнения полетного задания.

В современной теории робастного управления существует ряд методов решения этой задачи путем синтеза системы улучшения устойчивости и управляемости (СУУУ) ЛА.

В работе рассмотрены два метода синтеза СУУУ путем определения стабилизирующего регулятора и формирования цепи обратной связи по выходным переменным динамической системы: метод ЛМН [1–7], метод H_∞ -оптимизации [11–15].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения динамики системы, состоящей из объекта управления (ОУ) и исполнительного механизма (ИМ), в пространстве состояний имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w, \\ y = C_y x + D_{yu} u + D_{yw} w, \\ z = C_z x + D_{zu} u + D_{zw} w, \end{cases} \quad (1)$$

где $x = [x_{pl} \quad x_{act}]^T$ — вектор состояния системы, включающий вектор состояния ОУ x_{pl} и ИМ x_{act} ; u — вектор управления; y — вектор выходных переменных; w — вектор внешних возмущений; z — вектор выходных

переменных, используемый для оценки качества управления; A , B_u , B_w , C_y , D_{yu} , D_{yw} , C_z , D_{zu} , D_{zw} — не зависящие от времени матрицы, описывающие последовательное соединение ОУ и ИМ в пространстве состояний.

Закон управления для системы (1) можно представить в виде:

$$u = -K(s)y(s), \quad (2)$$

где $K(s)$ — стабилизирующий регулятор.

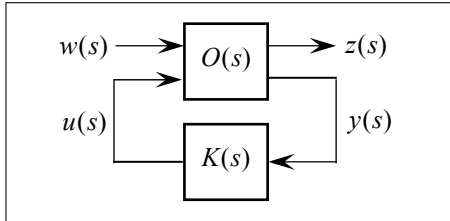


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы управления с обратной связью по выходу: $O(s)$ — объект управления; $K(s)$ — стабилизирующий регулятор; $w(s)$ — вектор внешних возмущений; $u(s)$ — вектор управления; $z(s)$ — вектор выходных координат, используемых для оценки качества системы; $y(s)$ — вектор выходных координат, используемых для обратной связи

Структурная схема замкнутой системы управления (СУ), состоящей из объекта и регулятора, изображена на рис. 1.

Необходимо синтезировать регулятор $K(s)$ (2), при включении которого в цепь обратной связи выполняется условие минимизации H_∞ -нормы функции комплементарной чувствительности $T_{zw}(s)$, связывающей вектор возмущений $w(s)$ с выходным вектором $z(s)$. Таким образом, задачу подавления внешних возмущений можно записать следующим образом:

$$\min_{K(s)} \|T_{zw}(s)\|_\infty, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — H_∞ -норма.

Известно, что минимизация H_∞ -нормы функции комплементарной чувствительности в соответствии с теоремой о малом коэффициенте усиления [13, 16] гарантирует робастную устойчивость системы.

Следует отметить, что ограничение спектральной нормы матрицы коэффициентов усиления регулятора $K(s)$ также имеет большое значение для практической реализации системы, поскольку позволяет избежать, или, по крайней мере, уменьшить вероятность насыщения ИМ [8].

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛМН ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Базирующийся на применении метода ЛМН алгоритм решения задачи подавления внешних возмущений включает три основных этапа [5].

1 этап. Синтез минимального регулятора $K(s)$ для динамической системы (1) в предположении полного измерения фазового вектора $x(s)$ путем решения прямой линейно-квадратичной (ЛК) задачи. При этом применение синтезированного регулятора $K(s)$ в цепи обратной связи должно гарантировать выполнение условия ограничения:

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma, \quad (4)$$

где γ — скаляр, отражающий степень подавления действующих на систему возмущений.

Матрица коэффициентов усиления регулятора $K(s)$ определяется в результате решения системы известных ЛМН [1] и описывается выражением:

$$K = YQ^{-1}, \quad (5)$$

где Y, Q — матрицы, полученные в результате решения системы ЛМН [1–6].

Задача синтеза регулятора (5) сводится к стандартной задаче ЛМН — Eigenvalue problem [1], связанной с минимизацией собственных чисел замкнутой системы, для решения которой используется оператор *gevp* в пакете MATLAB [2].

2 этап. Следующим этапом решения задачи подавления внешних возмущений методом ЛМН является решение обратной ЛК задачи для синтезированного на предыдущем этапе минимального регулятора $K(s)$, в результате чего определяются весовые матрицы Q, R, N квадратичного функционала соответствующей задаче H_2 -оптимизации или прямой ЛК задачи [1–6]. На данном этапе также выполняется процедура минимизации скаляра λ , ограничивающего спектральную норму стабилизирующего регулятора $K(s)$, при решении системы ЛМН [1–6]. Для решения данной задачи ЛМН в пакете MATLAB используется оператор *gevp* [2].

3 этап. Завершающим этапом синтеза СУУУ методом ЛМН является синтез H_2 -оптимального регулятора $K(s)$ и формирование статической обратной связи по выходу системы [1–6].

В случае неустойчивого ОУ на данном этапе вводится некоторый скаляр μ , при котором собственные числа матрицы состояния ОУ $A_\mu = A + \mu I$ будут лежать в левой полуплоскости: $\text{Re}(\lambda(A_\mu)) < 0$. Такой выбор параметра μ делает тривиальным выбор начального значения матрицы коэффициентов усиления регулятора $K(s)$ [4, 6]. Наряду с матрицей $K(s)$ скаляр μ будет также дополнительным параметром в процедуре минимизации квадратичного функционала, который в данном случае можно представить в виде [5–6]:

$$J = E \left\{ \int_0^\infty \left(\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) dt \right\} + r\mu^2, \quad (6)$$

где r — коэффициент, при достаточно большом значении которого, решение задачи синтеза стабилизирующего H_2 -оптимального регулятора $K(s)$ может быть приемлемой аппроксимацией стандартной процедуры минимизации квадратичного функционала.

В результате решения задачи оптимизации $\min_{K, \mu} J$ определяются оптимальные значения скаляра μ и коэффициентов усиления регулятора $K(s)$, удовлетворяющие условиям (3)–(4).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА H_∞ -ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Задача H_∞ -оптимального управления относится к теории задач определения максимальных и минимальных значений [11–12]. Ее основная идея состоит в рассмотрении худшего из возможных вариантов. При этом не обязательно знать полную информацию об ОУ и статистических характеристиках действующих на него возмущений.

Синтез стабилизирующего регулятора, который рассматривается в данной работе базируется на теории H_∞ -оптимального управления и выполняется на основе результатов, полученных в работах J.C. Doyle и K. Glover [17–18]. Процедура синтеза (2-Риккати подход) [15] состоит в применении теоремы разделения [19]. В данном случае алгебраические уравнения Риккати (АУР) [20], с помощью которых осуществляется синтез наблюдателя и регулятора отличаются от классических уравнений, используемых в обычной ЛК гауссовой задаче [21]. Это объясняется необходимостью выполнения условия робастности (4) [13, 15–16].

Структурная схема системы подавления внешних возмущений представлена на рис. 2, где $K(s)$, $P(s)$ — матрицы передаточных функций (ПФ) регулятора и номинального объекта регулирования соответственно; $W_u(s)$, $W_p(s)$ — матрицы ПФ, которые учитывают как веса управления $u(s)$ и выходного вектора $y(s)$, так и желаемые частотные свойства (loop shaping [11, 16, 22]) каждого из приведенных выше сигналов. Их выбор определяет характер протекания переходных процессов. В задаче H_∞ -оптимизации вектор выхода $z(s)$, используемый для оценивания показателя качества системы, в отличие от метода ЛМН, включает взвешенные сигналы $z_u(s)$, $z_p(s)$. Входом замкнутой системы, является $w(s)$ — вектор внешнего возмущения.

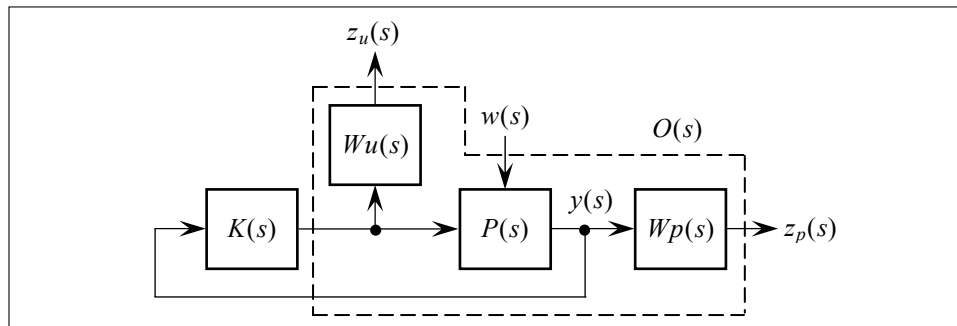


Рис. 2. Структурная схема

Требуется синтезировать регулятор $K(s)$ вида (2).

Используя алгоритмическую поддержку в Robust Toolbox [23], можно представить схему, показанную на рис. 2, в виде нижнего дробно-линейного преобразования (ДЛП) [13, 24], имеющий вид как на рис. 1 и являющийся стандартной формой, к которой нужно свести начальную систему, представленную на рис. 2, чтобы воспользоваться методом H_∞ -синтеза.

В отличие от метода ЛМН в нижнем ДЛП процедуры H_∞ -оптимизации $O(s)$ является обобщенным объектом, который включает исходный номинальный ОУ $P(s)$ и матрицы весовых функций $W_u(s)$, $W_p(s)$. В терминах обобщенного объекта ПФ замкнутой системы объект-регулятор $T_{wz}(s)$ определяется нижним ДЛП [15, 22]:

$$T_{wz}(O(s), K(s)) = O_{11}(s) + O_{12}(s)(I - O_{22}(s)K(s))^{-1}O_{21}(s) = F_l(O(s), K(s)).$$

Аналогично методу ЛМН задача H_∞ -оптимизации состоит в нахождении регулятора вида (2), который минимизирует H_∞ -норму (обеспечивает малость значений максимальных сингулярных чисел (СЧ)) ПФ объект-регулятор (3). С точки зрения качества следует также минимизировать функцию чувствительности по управлению $\|R(s)\|_\infty$, здесь $R(s) = K(s)(I + K(s)P(s))^{-1}$. Компромисс между ними достигается выбором матриц весовых ПФ $W_p(s)$, $W_u(s)$ определяющих желаемые частотные свойства сигналов выхода $y(s)$ и управления $u(s)$.

Если ввести блочную матрицу $N = [T_{wz}(s) \quad R(s)]^T$, то ее H_∞ -норма как и в выражении (4) должна быть ограниченной скаляром γ :

$$\|N(s)\|_\infty \leq \gamma. \quad (7)$$

После включения весовых ПФ в (7) получим взвешенную матрицу чувствительности:

$$N_w(s) = \left\| \begin{bmatrix} T_{wz}(s)W_p(s) \\ R(s)W_u(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma. \quad (8)$$

H_∞ -норма функции взвешенной чувствительности $N_w(s)$ является минимизируемым функционалом в процедуре H_∞ -оптимизации, зависящим от варьируемых функций $K(s)$, т.е. от матрицы ПФ искомого регулятора, а также от матриц весовых ПФ $W_u(s)$, $W_p(s)$.

В отличие от классической задачи вариационного исчисления, в данной задаче синтеза γ -субоптимального регулятора минимизируется не H_∞ -норма функции чувствительности $N_w(s)$, а ее верхняя оценка γ вышеуказанного функционала (8).

Синтез субоптимального регулятора на основе минимизации H_∞ -нормы функции чувствительности (8) базируется на одновременном решении двух уравнений Риккати (для наблюдателя и регулятора) [14–15, 22], зависящих от величины γ .

До начала процедуры синтеза для обобщенного объекта $O(s)$ должны обязательно выполняться следующие условия (*) [18, 25]: пары матриц (A, B_w) , (A, B_u) — стабилизируемы и пары (A, C_y) , (A, C_z) — детектируемы. Данное предположение является необходимым и достаточным для существования стабилизирующего регулятора. Матрицы $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$

и $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix}$ должны иметь соответственно полный столбцевой и строчный ранг для всех действительных ω . Это условие гарантирует — субоптимальный регулятор не содержит нулей или полюсов на мнимой оси, что приводит к неустойчивости замкнутой системы объект-регулятор. Условие $B_w D_{yw}^T = 0$ является необходимым для некоррелированности между возмущением $w(s)$ возбуждающим состояние системы и шумом наблюдений (если таковой рассматривается в задаче подавления внешних возмущений). Полный столбцевой ранг матриц D_{zu} и D_{yw} необходим для физической реализуемости синтезируемого субоптимального регулятора.

Отметим, что совместимость заданных требований (на основе выбора весовых ПФ $W_u(s)$, $W_p(s)$) к замкнутой системе объект-регулятор определяется существованием решения уравнений Риккати.

Процедура синтеза (рис. 3) заключается в том, что задается диапазон изменения величины $\gamma: \gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max}$ и для каждой величины γ , начиная с γ_{\max} (и постепенно уменьшаясь с заданным шагом) решаются одновременно два уравнения Риккати. Найденные решения для наблюдателя X и регулятора Y также должны удовлетворять дополнительным условиям: $Q_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $X := \text{Ric}(Q_\infty) > 0$, $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $Y := \text{Ric}(J_\infty) > 0$, $\|XY\|_\infty \leq \gamma$, где Q_∞, J_∞ — вспомогательные гамильтоновы матрицы [22].

Как только будут найдены стабилизирующие решения X и Y уравнений Риккати при которых дополнительные условия будут выполнены, процесс итераций прекращается, выдается найденное значение γ^* и четверка матриц (A_K, B_K, C_K, D_K) синтезированного регулятора $K(s)$. На рис. 3 каждым шагом цикла представлено суть приведенной выше процедуры синтеза.

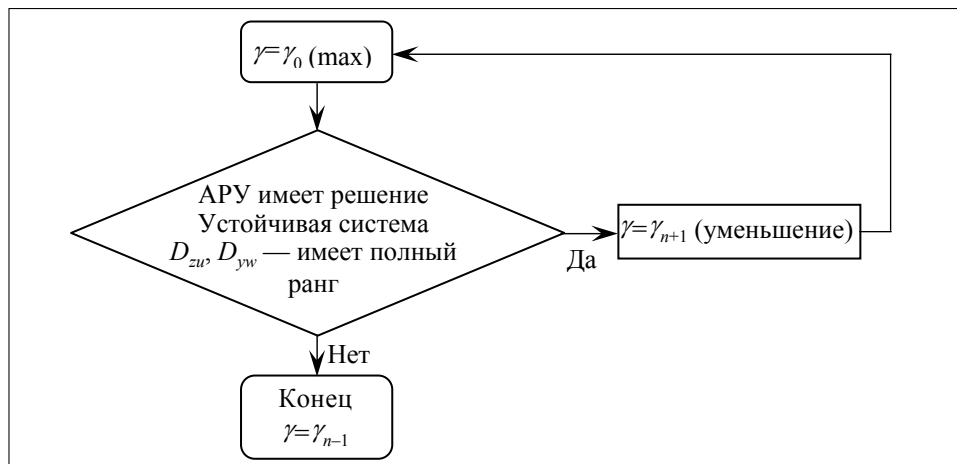


Рис. 3. Процедура γ -итераций

Таким образом, создание полного алгоритма процедуры H_∞ -синтеза стабилизируемого регулятора разбивается на несколько шагов:

Шаг 1. Определение динамических характеристик и структуры многомерного объекта — построение математической модели ОУ. Линейная математическая модель ОУ традиционно должна быть представлена в пространстве состояний.

Шаг 2. Необходимо сформировать (разработчиком) желаемые требования на робастность и качество замкнутой системы (неформально на структуру синтезируемого регулятора). Данные расчеты необходимы для определения весовых ПФ, которые используются в процедуре синтеза.

Шаг 3. Решение задачи H_∞ -оптимизации на основе АУР — процедура γ -итераций. Если найденное значение γ^* не удовлетворяет, то возвращаемся к шагу 2, иначе к шагу 4.

Шаг 4. Осуществление в среде SIMULINK [26] имитационного моделирования синтезированной γ -субоптимальной СУ.

Шаг 5. Оценка уровня подавления стохастических возмущений. Нахождение СЧ многомерной системы объект-регулятор.

Если результат приемлем с точки зрения качества и требований к подавлению возмущений, то процедура H_∞ -синтеза на этом успешно заканчивается. Иначе необходимо изменить весовые ПФ (а иногда и/или выбрать другие ПФ) и выполнить процедуру синтеза снова. Таким образом, данная процедура может проводиться в несколько этапов.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛМН И H_∞ -ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Синтез многомерного γ -субоптимального робастного регулятора для стабилизации ОУ и подавления действующих на него возмущений осуществлен на примере стабилизации вертолета АН-1Г, полная математическая модель которого представлена в работах [5, 9], в режиме висения в условиях возмущенной атмосферы.

Вектор состояния для вертолета включает такие компоненты:

$$x_{pl} = [V_x \quad V_z \quad \dot{\theta} \quad \theta \quad V_y \quad \dot{\varphi} \quad \varphi \quad \dot{\psi}]^T, \quad (9)$$

где V_x, V_y, V_z — проекции скорости вертолета на оси OX, OY, OZ соответственно; θ — угол тангажа; φ — угол крена; ψ — угол рыскания.

Вектор управления включает 4 компоненты:

$$u = [\delta_{lat} \quad \delta_{lon} \quad \delta_c \quad \delta_t]^T, \quad (10)$$

где δ_{lat} — боковой циклический шаг, δ_{lon} — продольный циклический шаг, δ_c — общий шаг, δ_t — шаг хвостового винта. В работе [9] эти входные воздействия измеряются в отклонениях управляющих рукояток (в сантиметрах) от положения равновесия.

С учетом измерения ускорений: $a_x = \frac{dV_x}{dt}$, $a_y = \frac{dV_y}{dt}$, $a_z = \frac{dV_z}{dt}$, вектор выходных переменных ОУ, используемый для формирования цепи обратной связи имеет вид:

$$y_{pl} = [a_x \quad a_z \quad \dot{\theta} \quad \theta \quad a_y \quad \dot{\phi} \quad \phi \quad \dot{\psi}]^T.$$

В работе рассматриваются атмосферные возмущения $w \in R^{2 \times 1}$, действующие на ОУ в режиме висения в горизонтальной плоскости: по продольной OX и поперечной OY осям.

Выходами системы для оценки показателя качества (3)–(4), примем ускорения вертолета:

$$z = [a_x \quad a_z \quad a_y]. \quad (11)$$

ИМ для рассмотренного ОУ описывается в пространстве состояний четверкой матриц: $A_{act} = \text{diag}\{-10, -10, -10, -10\}$, $B_{act} = -A_{act}$, $C_{act} = I_{4 \times 4}$, $D_{act} = O_{4 \times 4}$. Вектор состояния ИМ x_{act} совпадает с вектором управления объекта (10) — $x_{act} = u$. В результате реализации последовательного соединения ОУ с ИМ размерность системы увеличится и вектор состояния примет вид $x = [x_{pl} \quad x_{act}]^T \in R^{12 \times 1}$. Матрицы, описывающие последовательное соединение модели ОУ и ИМ в пространстве состояний, в данном случае будут иметь такие размерности: $A \in R^{12 \times 12}$, $B_u \in R^{12 \times 4}$, $B_w \in R^{12 \times 2}$, $C_y \in R^{8 \times 12}$, $D_{yu} \in R^{8 \times 4}$, $D_{yw} \in R^{8 \times 2}$, $C_z \in R^{3 \times 12}$, $D_{zu} \in R^{3 \times 4}$, $D_{zw} \in R^{3 \times 2}$ (в работе [5] приведены числовые значения этих матриц).

Результаты синтеза СУУУ вертолета методом ЛМН

Для синтеза СУУУ вертолета в режиме висения и подавления действующих возмущений методом ЛМН скаляр γ , ограничивающий H_∞ -норму (4) матрицы ПФ между внешним возмущением $w \in R^{2 \times 1}$ и выходом системы z (11), задан $\gamma = 0,8$.

В связи с тем, что рассматриваемый ОУ является неустойчивым, для процедуры H_2 -оптимизации замкнутой системы вводится некоторый скаляр μ , обеспечивающий устойчивость объекта: $\text{Re}(\lambda(A_\mu)) < 0$, где $A_\mu = A + \mu I$, I — единичная матрица соответствующей размерности, λ — собственные числа. Такой выбор параметра μ делает тривиальным выбор начального значения матрицы $K(s)$ для процедуры H_2 -оптимизации, которая в данном случае принята нулевой.

В результате реализации описанных этапов синтеза СУУУ методом ЛМН и H_2 -оптимизации системы со статической обратной связью по выходной переменной получены оптимальные значения коэффициентов усиления стабилизирующего регулятора $K(s) \in R^{4 \times 8}$, удовлетворяющего условию ограничения (4): $\|H_{zw}(j\omega)\|_\infty = 0,7740 < \gamma$.

Оптимальное значение скаляра μ , полученное в результате выполнения процедуры минимизации квадратичного функционала (6): $\mu = 2,2988 \cdot 10^{-8}$. Значение квадратичного функционала (6) для замкнутой системы с регулятором $K(s) \in R^{4 \times 8}$, синтезированным методом ЛМН, в цепи статической обратной связи: $J = 0,7933$.

Синтезированный методом ЛМН стабилизирующий оптимальный регулятор $K(s) \in R^{4 \times 8}$ будем далее называть ЛМН-регулятором.

Результаты синтеза СУУУ вертолета методом H_∞ -оптимизации

Не смотря на то, что ОУ является неустойчивым (без самовыравнивания) — содержит две пары комплексно-сопряженных чисел, причем их вещественные части положительные, что не является ограничением на применение процедуры H_∞ -оптимизации. В качестве сигналов, которые входят для оценивания показателя качества системы и являющиеся вектором выхода $z(s)$ (11). В работе весовые ПФ $W_u(s)$, $W_p(s)$ выбираются следующего вида:

$$W_p(s) = \text{diag} \left[\frac{2s+1}{0,1s+1}, \frac{2s+1}{0,1s+1}, \frac{2s+1}{0,1s+1} \right], \quad W_u(s) = \text{diag} [20, 20, 20, 20].$$

После включения формирующих весовых ПФ, обобщенный объект $O(s)$ полностью удовлетворяет условия (*) и далее осуществляется процедура γ -итераций. Для математической модели вертолета в соответствии с описанными выше алгоритмами, в среде MATLAB был выполнен синтез H_∞ -регулятора. Неравенство (8) выполняется с найденным значением $\gamma^* = 4,156$. Регулятор полного порядка, полученный в результате H_∞ -синтеза имеет размерность равную 10.

Наибольшее СЧ или спектральная норма для H_∞ -регулятора — 29,215, ЛМН-регулятора — 1,704. Собственные числа непрерывной замкнутой системы для синтезированных регуляторов лежат в левой полуплоскости и имеют приведенные ниже значения.

Для синтезированного ЛМН-регулятора:

$$-12,5866; -10,9332; -9,9054 \pm 0,3417i; -0,2747 \pm 0,3849i; -0,2475 \pm 0,01195i; \\ -0,2089 \pm 1,2234i; -0,1482 \pm 0,4873i.$$

Для H_∞ -регулятора:

$$-3480,2418; -23,6518; -10,9224; -9,1380; -4,4394; -0,9983; -0,8220; -0,4504; \\ -9,8892 \pm 1,2474i; -0,6828 \pm 2,5704i; -0,6024 \pm 0,3988i; -0,5422 \pm 0,06699i; \\ -0,2913 \pm 0,5193i; -0,08151 \pm 0,2999i; -9,9521 \cdot 10^{-3} \pm 1,0463 \cdot 10^{-6} i.$$

Заключительным этапом синтеза является моделирование полученных результатов в среде SIMULINK. Во время исследования СУУУ наиболее часто используют как детерминированные, так и стохастические внешние возмущения. Первые представляют собой порывы ветра, вторые — турбулентный ветер, описываемый известной моделью Драйдена [10], которую при синтезе не используют, а применяют только при моделировании системы. Возмущения, которые учитываются в данной задаче синтеза, должны удовлетворять единому условию, они должны быть ограничены по модулю.

Моделирование выполнено для замкнутой системы с H_∞ -регулятором и регулятором, синтезированным методом ЛМН, как при детерминированных, так и стохастических возмущениях. В процессе 60-минутного сеанса

моделирования реального времени турбулентность атмосферы приобрела такое среднеквадратичное отклонение (СКО): продольная и вертикальная составляющая скорости ветра соответственно — $\sigma_{u_g} = 2,813\text{ м/с}$, $\sigma_{v_g} = 2,892\text{ м/с}$. Результаты моделирования приведены на рис. 4. СКО для каждого параметра представлены в табл. 1, где 1 и 2 — замкнутая система с ЛМН-и H_∞ -регулятором соответственно.

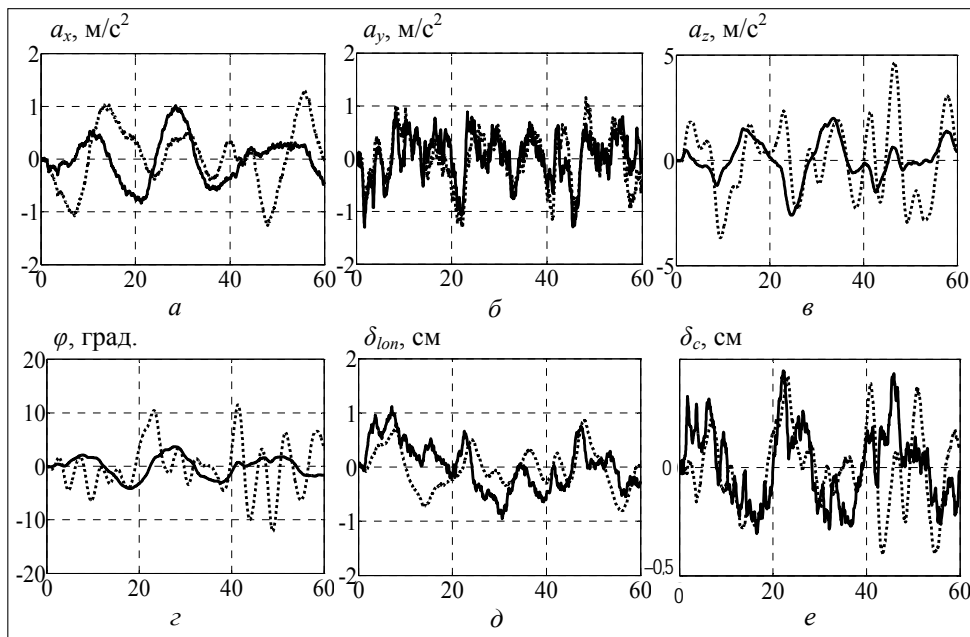


Рис. 4. Переходные процессы при стохастических воздействиях с ЛМН-регулятором (пунктирная линия) и H_∞ -регулятором (сплошная): а — по ускорению a_x ; б — по ускорению a_y ; в — по ускорению a_z ; г — по углу крена φ ; д — по продольному циклическому шагу δ_{lon} ; е — по общему шагу δ_c

Таблица 1. Характеристики номинальной системы при детерминированных сигналах

Система	$t_n, \text{с}$	Максимальное отклонение											
		$a_x, \text{ м/с}^2$	$a_y, \text{ м/с}^2$	$a_z, \text{ м/с}^2$	$\theta, \text{ град.}$	$\dot{\theta}, \text{ град./с}$	$\varphi, \text{ град.}$	$\dot{\varphi}, \text{ град./с}$	$\psi, \text{ град./с}$	$\delta_{lat}, \text{ см}$	$\delta_{lon}, \text{ см}$	$\delta_c, \text{ см}$	$\delta_t, \text{ см}$
1	50	0,6	0,58	-0,2	-3,4	0,94	3,4	0,8	-22,5	-0,36	-0,32	0,048	0,43
2	60	0,1	0,09	0,28	1	0,27	-0,8	0,15	-23	-0,07	-0,66	-0,13	-0,06

Таблица 2. СКО номинальной системы при стохастических сигналах

Система	$\sigma_{a_x}, \text{ м/с}^2$	$\sigma_{a_y}, \text{ м/с}^2$	$\sigma_{a_z}, \text{ м/с}^2$	$\sigma_\theta, \text{ град.}$	$\sigma_{\dot{\theta}}, \text{ град./с}$	$\sigma_\varphi, \text{ град.}$	$\sigma_{\dot{\varphi}}, \text{ град./с}$	$\sigma_{\dot{\psi}}, \text{ град./с}$	$\sigma_{\delta_{lat}}, \text{ см}$	$\sigma_{\delta_{lon}}, \text{ см}$	$\sigma_{\delta_c}, \text{ см}$	$\sigma_{\delta_t}, \text{ см}$
1	0,543	0,845	0,474	3,325	1,719	5,123	4,230	18,925	0,659	0,343	0,179	0,407
2	0,308	0,286	0,403	1,811	0,674	1,536	0,615	10,095	0,524	0,359	0,141	0,216

Для оценки уровня подавления стохастических возмущений (табл. 3)

Таблица 3. Оценка подавления стохастических возмущений

Система	$\sigma_{a_{u_g}} / \sigma_{a_x}$	$\sigma_{a_{v_g}} / \sigma_{a_y}$
1	14,392	11,539
2	25,398	34,142

в системе возьмем отношения СКО значений продольной и вертикальной составляющих ускорений ветра соответственно: $\sigma_{a_{u_g}} = 7,808 \text{ м/с}^2$, $\sigma_{a_{v_g}} = 9,753 \text{ м/с}^2$ к СКО значений выходных сигналов для ускорений по осям верто-

лета a_x, a_y .

Для оценки уровня подавления детерминированных возмущений в системе возьмем отношения максимальных по модулю значений ускорений на входе системы к максимальным значениям выходных ускорений. Для ЛМН- и H_∞ -регулятора соответственно: $\Delta_{\text{ЛМН}}(a_x) = 1,1404$, $\Delta_{\text{ЛМН}}(a_y) = 6,219$, $\Delta_{H_\infty}(a_x) = 1,1834$, $\Delta_{H_\infty}(a_y) = 7,9907$.

На рис. 5. приведены графики СЧ для замкнутой системы с ЛМН- и H_∞ -регулятором.

Максимальные значения СЧ соответствуют $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ и согласно рис. 5 для системы с ЛМН- и H_∞ -регулятором принимают соответствующие значения: 0,68155 и 0,31096.

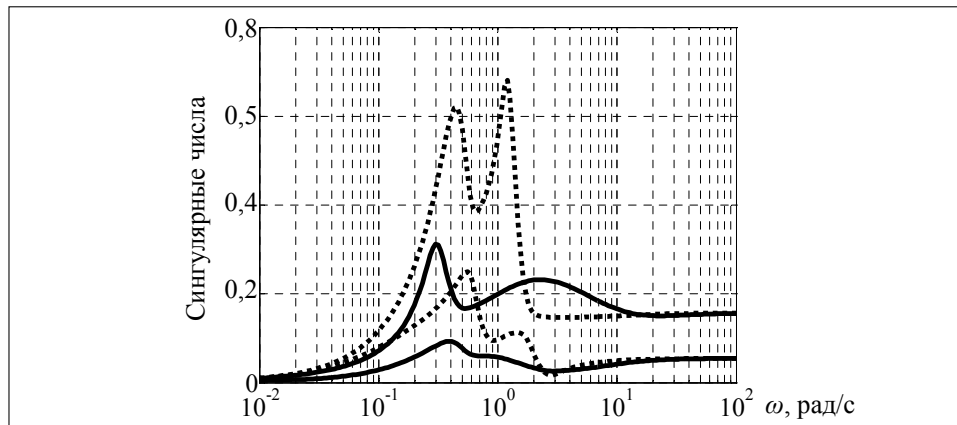


Рис. 5. Сингулярные числа замкнутой системы с ЛМН-регулятором (пунктирная) и H_∞ -регулятором (сплошная)

Отметим, что основное сходство между рассмотренными алгоритмами синтеза СУУУ методом ЛМН и H_∞ -оптимизации состоит в оценивании качества подавления ограниченных по модулю внешних возмущений с помощью соответствующей H_∞ -нормы. Последняя является обобщенным коэффициентом усиления системы и может интерпретироваться как энергетическая оценка усиления, минимизирующая наиболее плохие случаи среднеквадратичного отклонения регулируемой переменной, когда возмущение носит неизвестный характер (спектр).

Подавление действующих на объект возмущений для двух рассмотренных методов является задачей субоптимальной стабилизации и состоит

в выборе такого регулятора, при котором H_∞ -норма матрицы ПФ замкнутой системы была бы минимальной.

ВЫВОДЫ

На основе анализа и сравнения результатов синтеза СУУУ для вертолета в режиме висения, полученных с использованием алгоритма ЛМН и H_∞ -оптимизации, отметим следующее:

1. В данной работе применение алгоритма синтеза системы стабилизации, основанного на H_∞ -оптимизации, свидетельствует о более высоком уровне подавления внешних возмущений по сравнению с методом ЛМН. С одной стороны, это достигается введением весовых ПФ $W_u(s)$, $W_p(s)$, а с другой стороны, структурой регулятора, который в отличие от метода ЛМН является не просто матрицей коэффициентов усиления, а отдельной динамической системой.

2. Поскольку алгоритм ЛМН является более формализованным, его использование инженером-проектировщиком СУУУ предпочтительнее в отличие от метода H_∞ -оптимизации, где выбор весовых ПФ зачастую сводится к методу «проб и ошибок» и во многом зависит от опыта исследователя.

3. Не смотря на то, что $\|T_{zw}(s)\|_\infty$, полученная в результате синтеза методом H_∞ -оптимизации практически в два раза меньше по сравнению с результатами применения алгоритма ЛМН, последний позволяет достичь еще меньшей величины $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ путем введения соответствующего значения скаляра γ . Единственным ограничением является то, что величина данного скаляра не должна быть меньше спектральной нормы D_{zw} , а именно 0,1572.

4. С точки зрения практической реализации синтезированная методом ЛМН СУУУ является более применимой, в связи с упрощенной структурой регулятора.

5. Синтезированный методом ЛМН стабилизирующий регулятор обладает меньшей спектральной нормой по сравнению с H_∞ -регулятором (рис. 4). Для практической реализации системы уменьшение спектральной нормы регулятора является важным аспектом, позволяющим ограничить значения коэффициентов усиления регулятора и тем самым снизить вероятность насыщения ИМ [8].

Не смотря на недостатки, свойственные двум рассмотренным методам, результаты синтеза и моделирования СУУУ демонстрируют достаточно высокий уровень подавления внешних возмущений для неустойчивого ОУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory // SIAM books. — Philadelphia. — 1994. — 193 p.
2. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. LMI Control Toolbox User's Guide. The Math Works Inc. — Natick. — 1995. — 310 p.
3. Larin V.B. Compensation of External Perturbations under Uncertainty // International Applied Mechanics. — **38**, № 9. — 2002. — P. 1145–1151.
4. Larin V.B. Stabilization of System by Static Output Feedback // Applied and Computational Mathematics. — **2**, № 1. — 2003. — P. 2–12.

5. Горбатюк О.Д., Ларин В.Б., Туник А.А. Подавление возмущений, действующих на вертолет в режиме висения, с помощью статической обратной связи по выходу // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 3. — С. 87–97.
6. Ларин В.Б., Туник А.А. О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 42, № 5. — 2006. — С. 132–144.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 3–18.
8. Davidson E.I., Ferguson I.J. The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods // IEEE Transaction on Automatic Control. — AC-26, № 1. — 1981. — P. 93–110.
9. Hess R.A. Rotorcraft Handling Qualities in Turbulence // Journal Of Guidance, Control and Dynamics. — 18, № 1. — 1995. — P. 39–45.
10. McLean D. Automatic Flight Control Systems. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990. — 593 p.
11. Francis B.A. A course in H_∞ control theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1987. — 141 p.
12. Первозванский А.А., Барабанов А.Е. Оптимизация по равномерно частотным показателям (H_∞ -теория) // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 9. — С. 3–32.
13. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and optimal control. — NJ: Prentice Hall, 1996. — 403 p.
14. Туник А.А., Галкин Є.В., Мельник К.В. H_∞ -оптимізація системи керування польотом // Електроніка та системи управління. — 2006. — № 2(8). — С. 107–117.
15. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
16. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. — John Wiley & Sons. — 1997. — 559 p.
17. Doyle J.C. Synthesis of robust, controllers and filters // In Proceedings of the 12-nd IEEE Conference on Decision and Control. — 1983. — P. 109–114.
18. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State space solution to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1989. — 34, № 8. — P. 831–847.
19. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 464 с.
20. Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati equations. — Oxford: Oxford University Press. — 1995. — 504 p.
21. Athans M. The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — 16. — P. 529–552.
22. Doyle J.C., Francis B.A., Tarmenbaum A.R. Feedback control theory. — NJ: Englewood Cliffs: MacMillan. — 1992. — 489 p.
23. Chiang R.Y., Safonov M.G., Packard A. Robust Control Toolbox, 3-rd ed. — Natick, MA: The MathWorks, Inc. — 2007. — 228 p.
24. Туник А.А., Мельник К.В. Проектування багатовимірних систем керування польотом в умовах невизначеності за допомогою технології μ -синтезу // Вісн. НАУ. — 2008. — № 3. — С. 73–84.
25. Green M., Limebeer D.J. Robust linear control. — NJ: PrenticeHall. — 1995. — 538 p.
26. Simulink® User's Guide. The MathWorks, Inc. — Natick. — 2010. — 1616 p.

Поступила 26.04.2010